

Научно-исследовательская работа

Математика

**ПОДОБИЕ В ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ И САМОПОДОБИЕ В  
ГЕОМЕТРИИ ФРАКТАЛОВ КАК ПРИМЕРЫ ЛОГИЧЕСКИХ  
КАТЕГОРИЙ СТРОГОЙ И НЕСТРОГОЙ АНАЛОГИИ**

Выполнил:

**Черноштан Александр Дмитриевич**

учащийся 9 ИТ класса

СУНЦИ ЮФО, Россия г. Ростов-на-Дону

Руководитель:

**Шевченко Анастасия Александровна,**

Преподаватель математики

СУНЦ ЮФО, Россия, г. Ростов-на-Дону

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
---------------	---

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПОНЯТИЙ «ПОДОБИЕ» И «САМОПОДОБИЕ». АНАЛОГИЯ КАК ЛОГИЧЕСКАЯ КАТЕГОРИЯ. СТРОГАЯ И НЕСТРОГАЯ АНАЛОГИЯ .....	5
--	---

ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	10
------------------	----

Список литературы .....	12
-------------------------	----

Приложение 1.....	14
-------------------	----

## Введение

Наше исследование направлено на сравнение таких категорий двух разных геометрий, как подобие и самоподобие с опорой на логические категории строгой и нестрогой аналогии.

Конечно, очень многие современные источники, анализирующие геометрию фракталов, так или иначе проводят параллели между данной научной областью и элементарной геометрией Евклида, но ни один из известных нам авторов не проводил компаративный анализ двух геометрий, опираясь на понятия подобия и самоподобия, а также на логические категории строгой и нестрогой аналогии.

В ходе исследования мы анализировали работы таких отечественных и зарубежных авторов, как В.А.Еровенко [3], А.А. Шабаршин [16], Д.И. Иудин, Е.В.Копосов [4], Елхова О.И. [2], С.Д.Хайтун [15], Б.Мандельброт [6], М.Шредер [17], Р.Кроновер [5], Е.Федер [14] и многих других, но поскольку объем научной работы ограничен, мы ограничимся цитированием лишь нескольких авторов.

Предметом нашего исследования являются трансформации в подходе к анализу явлений, произошедшие в современной математической науке. Объектом же исследования являются случаи подобия фигур в евклидовой геометрии и самоподобия фракталов в геометрии фракталов.

В нашем исследовании делается попытка сравнить понятия подобия евклидовой геометрии и самоподобия геометрии фракталов Б. Мандельброта с целью выявления принципиальных различий между подходами элементарной геометрии Евклида и геометрии фракталов Б. Мандельброта, а также продемонстрировать, каким образом эти различия обусловлены изменением подхода к получению нового научного знания, отход от метода выявления строгой аналогии к вероятностным заключениям, основанным на нестрогой аналогии

Эта общая цель обуславливает и ряд конкретных задач:

- осуществить компаративный анализ категорий подобия и самоподобия в двух разных типах геометрий, вычленив сходства и различия между ними
- рассмотреть круг задач, которые решаются в реальной жизни посредством методов евклидовой геометрии и геометрии фракталов, опираясь на понятия подобия и самоподобия.
- сравнить элементарную геометрию и геометрию фракталов исходя из функциональной направленности двух типов научного знания.
- применить логические категории строгой и нестрогой аналогии к анализу сходств и различий между понятиями подобия и самоподобия.
- осмыслить принципиальную разницу между характером отношений подобия и самоподобия как проявление отхода современной естественной науки от отношений строгой аналогии в сторону поиска научного знания, опираясь на отношения вероятностной аналогии.

## Основная часть. Сопоставление понятий «подобие» и «самоподобие»

### Аналогия как логическая категория

#### Строгая и нестрогая аналогия

В логике как подобие, так и самоподобие выступают видами умозаключений, основанных на аналогии. Эта категория прослеживается как в естественных, так и в гуманитарных науках. Аналогия была известна еще в античности. Подобными могут быть как предметы, так и отношения между ними.

Аналогию можно определить следующим образом: «Аналогия свойств (аналогия предметов) – это умозаключение, в котором объектом уподобления выступают два единичных предмета, а переносимым признаком – свойства этих предметов.

Схема аналогии свойств:

Предмет  $A$  обладает свойствами  $a, b, c$

Предмет  $B$  обладает свойствами  $a, b$

Вероятно, предмет  $B$  обладает свойством  $c$ » [1].

Отношения подобия в Евклидовой геометрии можно констатировать по признаку формы, соответственно, можно ожидать и определенной закономерности в соотношении размеров сторон, кривых и площадей

: «Две фигуры называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия, т.е. таким преобразованием, при котором расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз.» [9].

Проще говоря, «Подобие – это понятие, характеризующее наличие одинаковой формы геометрических фигур (то есть форма подобных фигур не

зависит от размера данных фигур). Подобные фигуры – это фигуры одинаковой формы, но разного размера.» [7].

Таким образом, при преобразовании подобия размеры сторон и кривых фигуры изменяются в одно и то же число раз без изменения формы, а равенство углов сохраняется: «Так же как и для движения, доказывається, что при преобразовании подобия три точки  $A, B, C$ , лежащие на одной прямой, переходят в три точки  $A_1, B_1, C_1$ , также лежащие на одной прямой. Причем если точка  $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$ , то точка  $B_1$  лежит между точками  $A_1$  и  $C_1$ . Отсюда следует, что преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки... Преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.» [8].

Аналогия бывает двух видов: строгая и нестрогая.

«При строгой научной аналогии учитываются следующие требования: 1) общие признаки  $a, b, c$  должны быть в точности одинаковыми у сравниваемых предметов; 2) связь признаков  $a, b, c$  с признаком  $d$  не должна зависеть от специфики сравниваемых предметов.»

Строгая и нестрогая аналогии (studopedia.su)

Безусловно, подобие геометрических фигур это строгая аналогия, так как углы, соотношение размеров сторон, а также форма строго идентичны у сравниваемых геометрических фигур, а соотношение площадей строго равно квадрату коэффициента подобия.

Нестрогая аналогия является результатом определенного приближения, дополненного методологией здравого смысла, которая помогает подкрепить доказательствами объективность отношений подобия. Нестрогая аналогия связана с применением метода типологизации.

По определению Бенуа Манделброта важнейшим свойством фрактала является самоподобие: «В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию о всем фрактале. Определение фрактала, данное

Мандельбротом, звучит так: "Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.» [16, с. 192].

Даже в оригинальном определении Бенуа Манделброта слова «в каком-то смысле» сигнализируют о том, что самоподобие фрактала это пример скорее нестрогой аналогии, при выявлении которой допускается известная приближительность. Например, фракталы живой природы, такие как деревья, листья, цветы, не отличаются отношениями строгой аналогии, но все равно интуитивно осмысливаются нами как примеры отношений самоподобия. (См. приложения 1)

«Одним из основных свойств фракталов является самоподобие. В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию о всем фрактале.» [10].

Хотелось бы уточнить, что в нашем исследовании мы рассматриваем исключительно геометрические фракталы, потому что речь идет о сравнении двух геометрий.

- Разница между строгой и нестрогой аналогией следующая:
  1. Строгая аналогия, которая дает достоверное заключение;
  2. Нестрогая аналогия, дает вероятное заключение» [12].

Так, сравнивая размеры сторон и углов многоугольников, мы можем прийти к однозначному достоверному заключению об их подобии. Приняв за исходную точку некий фрагмент и преобразуя его во все новых и новых итерациях по определенной схеме мы можем сделать вероятностное заключение о самоподобии фрактала, который может быть построен с помощью преобразований, выполняемых по определенной схеме.

Частным примером такого фрактала является кривая Коха, которая позволяет понять, почему фракталы представляются монстрами в сравнении с идеальными гладкими фигурами Евклидовой геометрии:

«К триадной кривой Коха традиционные методы геометрического анализа оказались неприменимы, поэтому кривая Коха оказалась чудовищем – «монстром» среди гладких обитателей традиционных геометрий.» [10].

В определении понятия самоподобия, данном в Википедии, также делается оговорка, которая подразумевает нестрогость аналогии, которая характеризует фрактал: «Самоподобный объект — объект, в точности или приближённо совпадающий с частью себя самого (то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей).» [11].

Для фрактала полное совпадение с частью себя самого не является обязательным условием наличия самоподобия. Приближенное совпадение также не исключает существования фрактала.

Строгая аналогия традиционно была более распространена в науке, так как именно она расценивалась как достоверное знание. Нестрогая же аналогия может давать вероятное, то есть, возможно, и ошибочное знание.

«Для повышения степени вероятности выводов по нестрогой аналогии следует выполнить ряд условий:

- 1. Число общих признаков должно быть, возможно, большим;
- 2. Необходимо учитывать степень существенности сходных признаков;
- 3. Общие признаки должны быть по возможности более разнородными;
- 4. Необходимо учитывать количество и существенность пунктов различия
- 5. Переносимый признак должен быть того же типа, что и сходные признаки.» [13].



То есть хотя отношения между различными частями фрактала могут быть и приблизительно аналогичными, к примеру, по форме, но многочисленность итераций, при каждой из которых в известной степени сохраняется подобие преобразования, дает некую гарантию, что заключение о самоподобии фрактала не ошибочным силлогизмом, а вероятной истиной.

## Заключение

Опираясь на компаративный анализ различных математических источников, нам удалось выявить следующие различия подобия и самоподобия:

### Различия подобия и самоподобия

1) Если в случае подобия сравниваются две разные фигуры, то в случае самоподобия фигура сравнивается с исходным фрагментом себя самой.

2) Если в случае подобия речь идет об однократном преобразовании путем увеличения расстояния между каждыми двумя точками фигуры в  $n$ -ое число раз, то в случае самоподобия речь идет о бесчисленных итерациях преобразования на разных уровнях генерации фигуры.

3) Если в случае подобия речь идет о простой линейной зависимости, то в случае самоподобия отношения исходной части и производного фрагмента фрактала могут быть описаны самыми разными математическими функциями, при этом и в рамках одного фрактала эта зависимость изменяется при переходе от уровня к уровню.

4) Если в случае подобия и исходная и производная фигура могут быть охарактеризованы точными математическими величинами, то в случае самоподобия речь может идти только о неких пределах, к которым стремятся данные фигуры при бесконечном числе преобразований.

5) В то время как подобие описывается точными и однозначными математическими соответствиями, самоподобным фрактал считается и при некоторой приближительности идентичности операции преобразования на разных уровнях.

б) Если в случае подобия евклидовой геометрии речь идет о строгой аналогии, то фрактал это пример скорее нестрогой аналогии.

7) Соответственно, подобие многоугольников является точным и достоверным понятием, а самоподобие фрактала может расцениваться и как вероятно истинный силлогизм, подтверждаемый зачастую не однозначным подобием конкретных частей фрактала, а многочисленностью частей фрактала, связанных отношениями приблизительного подобия между собой.

В ходе данного анализа нам удалось выявить и ряд сходств понятий подобия и самоподобия:

1) Геометрическое подобие всегда, а самоподобие как правило являются зрительно интуитивно очевидным и понятным без математических доказательств.

2) В некоторых частных случаях самоподобие фрактала можно свести к воспроизведению бесчисленного количества подобных фигур.

Наше исследование понятий подобия и самоподобия позволяет нам сделать выводы о принципиальном различии подходов евклидовой геометрии и геометрии фракталов.

## Список литературы

1. Виды заключений по аналогии. / Портал Studme.org [Электронный ресурс]. URL: [https://studme.org/57156/logika/vidy\\_zaklyucheniya\\_analogii](https://studme.org/57156/logika/vidy_zaklyucheniya_analogii) (дата обращения: 29.11.2020).
2. Елхова О.И. Фрактальность виртуальной реальности. // Философия, социология, культурология и политология. Вестник Башкирского университета. 2014. Т. 19. №1
3. Еровенко В.А. Концепция фрактала Мандельброта с математической и философской точек зрения. // Математические структуры и моделирование. 2015. № 4(36). С. 29-38.
4. Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному // Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012.–200 с.
5. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории: Пер. с англ. Постмаркет, М., 2000.
6. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. Институт компьютерных исследований, М., 2002.
7. Определение подобных фигур. / Энциклопедия математики MathVox. [Электронный ресурс]. <https://mathvox.ru/geometria/osnovnie-ponyatiya-i-figuri-geometrii/glava-5-podobie-figur/opredelenie-podobnih-figur/> (дата обращения: 29.11.2020).
8. Подобие фигур. / База знаний stud.wiki [Электронный ресурс]. [https://yandex.ru/turbo/stud.wiki/s/mathematics/2c0b65635b2ad68a5d43b88421306d37\\_0.html](https://yandex.ru/turbo/stud.wiki/s/mathematics/2c0b65635b2ad68a5d43b88421306d37_0.html) (дата обращения: 29.11.2020).
9. Подобие фигур. Подобные треугольники. / ЭМГеометрия. Дистанционная математическая школа ММФ. [Электронный ресурс]. <https://dl.bsu.by/mod/book/view.php?id=10185&chapterid=1320> (дата обращения: 29.11.2020).

10. Понятие фрактал и фрактальная геометрия. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.liveinternet.ru/users/lifestyleforyou/post153645471/> (дата обращения: 29.11.2020).
11. Самоподобие. / Википедия. Свободная энциклопедия. [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B0%D0%BC%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%B1%D0%B8%D0%B5> (дата обращения: 29.11.2020).
12. Строгая и нестрогая аналогии. / Портал studopedia.su [Электронный ресурс]. URL: [https://studopedia.su/16\\_58357\\_strogaya-i-nestrogaya-analogii.html](https://studopedia.su/16_58357_strogaya-i-nestrogaya-analogii.html) (дата обращения: 29.11.2020).
13. Строгая и нестрогая аналогии. / Портал Studwood.ru [Электронный ресурс]. URL: [https://studwood.ru/910799/filosofiya/strogaya\\_nestrogaya\\_analogii](https://studwood.ru/910799/filosofiya/strogaya_nestrogaya_analogii) (дата обращения: 29.11.2020).
14. Федер Е. Фракталы: Пер. с англ. Мир, М., 1991.
15. Хайтун С. Д. Космологическая картина мира, вытекающая из гипотезы о фрактальной Вселенной. / Философия и Космология. Научный журнал (Том 12) // Международное философско-космологическое общество (МФКО) – 283 с.
16. Шабаршин А.А. Введение во фракталы. [Электронный ресурс]. URL: <https://algotlist.manual.ru/graphics/fracart.php> (дата обращения: 29.11.2020).
17. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая: Пер. с англ. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001.

Приложение 1.

Примеры фракталов с нестрогой аналогией в живой природе.

